

7. ҚҰБЫРЛАРДАҒЫ СҰЙЫҚТЫҢ МӘЖБҮРЛІ АҒУ ПРОЦЕСІН СИПАТТАУ (жалғасы)

Сұйықтың дөңгелек құбырда ағуы кезіндегі жылу алмасудың математикалық сипаттамасы. Тұрақтандырылған жылу алмасу ұғымы. Тұрақты жылу ағыны кезінде дөңгелек құбырдағы тұрақтандырылған жылу алмасу кезіндегі жылдамдықтар мен температуралар өрісі. Лайон интегралы.

7.3. Сұйықтың дөңгелек құбырда ағуы кезіндегі жылу алмасудың математикалық сипаттамасы

Тік дөңгелек құбырдағы сұйықтың гидродинамикалық және термиялық тұрақтандырылған ағыны кезіндегі жылу беру коэффициентін анықтаудың жуықталған әдісін қарастырайық [3].

Сұйық сығылмайтын деп шамалайтын боламыз, оның физикалық параметрлері тұрақты, үйкеліс жылуын елемеуге болады.

Осыке симметриялық стационарлық ағын үшін цилиндрлік координаттарда жазылған энергия теңдеуі келесі түрде ие болады:

$$\rho \cdot c_p \cdot \left(w_r \frac{\partial t}{\partial r} + w_x \frac{\partial t}{\partial x} \right) = \lambda \cdot \left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \right).$$

Радиалды бағыттағы жылуды тасымалдау осьтікке қарағанда көп үлкен болады деп шамалаймыз. Сонда $\partial^2 t / \partial x^2$ мүшесін елемеуге болады. Сонымен қатар $w_r = 0$. Бұл ретте энергия теңдеуін келесі түрде жазуға болады:

$$\begin{aligned} \rho \cdot c_p \cdot w_x \frac{\partial t}{\partial x} &= \lambda \cdot \left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \left(\lambda \cdot r \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \lambda \frac{\partial t}{\partial r} \right) = \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda \cdot r \frac{\partial t}{\partial r} \right), \end{aligned}$$

$$\rho \cdot c_p \cdot w_x \cdot r \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda \cdot r \frac{\partial t}{\partial r} \right).$$

Турбулентті ағында жылу тек жылу өткізгіштікпен ғана емес, турбулентті лүпілдер арқылы да тасымалданады, ол үшін төмендегідей жазуға болады:

$$\rho \cdot c_p \cdot w_x \cdot r \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} \left((\lambda + \lambda_T) \cdot r \frac{\partial t}{\partial r} \right),$$

мұндағы λ_T – жылу өткізгіштік коэффициентінің турбулентті аналогы; t және w_x – уақыт бойынша орташаландырылған температураның және турбулентті ағын жалдамдығының тұрақты (нүктелік) мәндері.

7.4. Тұрақтандырылған жылу алмасу ұғымы.

Тұрақты жылу ағыны кезінде дөңгелек құбырдағы тұрақтандырылған жылу алмасу кезіндегі жылдамдықтар мен температуралар өрісі

$q_c = \text{const}$ қабылдаймыз, сонда жылу балансының теңдеуінен $G \cdot c_p \overline{dt_{жс}} = q_c dF$ алынады:

$$\frac{\overline{dt_{жс}}}{dF} = \frac{q_c}{G \cdot c_p} = \text{const}$$

немесе жылыту беті ауданының $F=2\pi \cdot r_0 \cdot x$ ескере отырып, сұйықтың шығыны $G = \rho \cdot \bar{w}_x \cdot S$, құбырдың көлденең қимасының ауданы – $S = \pi \cdot r_0^2$:

$$\frac{dt_{\text{жс}}}{dx} = \frac{2q_c}{\rho \cdot c_p \cdot \bar{w}_x \cdot r_0} = \frac{2\alpha(t_c - \bar{t}_{\text{жс}})}{\rho \cdot c_p \cdot \bar{w}_x \cdot r_0} = \text{const},$$

мұндағы $\bar{t}_{\text{жс}}$ – берілген қимадағы сұйықтың орташа калориметриялық (энтальпия бойынша орташа) температурасы; $\bar{w}_x$ – осы қимадағы орташа жылдамдық; r_0 – құбыр радиусы.

Қарастырылатын шарттарда сұйықтың орташа температурасы x бойынша сызықтық функция болады, себебі жылу беру коэффициентінің тұрақты мәні кезінде $\alpha = \text{const}$ (тұрақтандырылған ағын) сызықтық заң бойынша тек $\bar{t}_{\text{жс}}$ өзгеріп қоймайды, қабырға температурасы да өзгереді:

$$t_c - \bar{t}_{\text{жс}} = \frac{q_c}{\alpha} = \frac{\text{const}}{\text{const}} = \text{const}.$$

Өзгермейтін физикалық параметрлер кезінде сұйықтың тұрақты температурасы құбырдың бойымен сызықтық заң бойынша өзгереді және туынды да сондай:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{2q_c}{\rho \cdot c_p \cdot \bar{w}_x \cdot r_0} = \text{const}.$$

7.5. Лайон интегралы

Алынған туынды мәнін теңдеуге қоямыз:

$$\rho \cdot c_p \cdot w_x \cdot r \frac{2q_c}{\rho \cdot c_p \cdot \bar{w}_x \cdot r_0} = \frac{d}{dr} \left((\lambda + \lambda_T) \cdot r \frac{dt}{dr} \right)$$

немесе өлшемсіз түрде, мұндағы $W_x = w_x / \bar{w}_x$ және $R = r / r_0$ – өлшемсіз жылдамдық пен радиус:

$$2q_c \cdot r_0 \cdot W_x \cdot R = \frac{d}{dR} \left((\lambda + \lambda_T) \cdot R \frac{dt}{dR} \right).$$

Айнымалыларды бөлу және 0 -ден бастап R -ге дейін және 0 -ден бастап $\left((\lambda + \lambda_T) \cdot R \frac{dt}{dR} \right)$ дейін шектерінде интегралдай отырып, аламыз:

$$(\lambda + \lambda_T) R \frac{dt}{dR} = 2q_c \cdot r_0 \int_0^R W_x R dR.$$

Бұдан шығады:

$$\frac{dt}{dR} = \frac{2q_c \cdot r_0}{(\lambda + \lambda_T) R} \int_0^R W_x R dR$$

немесе

$$dt = \left(\frac{2q_c \cdot r_0}{(\lambda + \lambda_T) R} \int_0^R W_x R dR \right) dR. \quad (7.1)$$

Тұрақты жылу сыйымдылығы және тығыздығы кезінде сұйықтың орташа калориметриялық температурасы келесі теңдеумен анықталады:

$$\overline{t_{жс}} = \frac{1}{f_0 \overline{w_x}} \int_0^{f_0} w_x t df.$$

Дөңгелек құбыр үшін $f = \pi \cdot r^2$ және $df = d(\pi \cdot r^2) = 2\pi \cdot r dr$, сонда

$$\overline{t_{жс}} = \frac{1}{r_0^2 \overline{w_x}} \int_0^{r_0} w_x \cdot t \cdot r dr = 2 \int_0^1 t \cdot W_x \cdot R dR.$$

Келесі формуланы пайдалана отырып, бұл интегралды бөліктермен табамыз:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

$t = u$ және $dv = W_x R dR$ немесе $v = \int_0^R W_x R dR$ деп белгілейміз, сонда

$$\begin{aligned} \overline{t_{жс}} &= 2 \left[t \int_0^R W_x R dR \Big|_0^1 - \int_0^1 \left(\int_0^R W_x R dR \right) dt \right] = \\ &= 2 \left[t_c \int_0^1 W_x R dR - \int_0^1 \left(\int_0^R W_x R dR \right) dt \right]. \end{aligned}$$

$\int_0^1 W_x R dR$ интегралы келесі жолмен түрлендірілуі мүмкін:

$$\begin{aligned} \int_0^1 W_x R dR &= \frac{2\pi}{2\overline{w_x} \cdot \pi \cdot r_0^2} \int_0^{r_0} w_x \cdot r dr = \frac{\int_0^{r_0} w_x \cdot 2\pi \cdot r dr}{2\overline{w_x} \cdot \pi \cdot r_0^2} = \\ &= \frac{\overline{w_x} \cdot \pi \cdot r_0^2}{2\overline{w_x} \cdot \pi \cdot r_0^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Сонда интегралдың алынған мәнін алдыңғы теңдеуге қоя отырып, аламыз:

$$\overline{t_{жс}} = t_c - 2 \int_0^1 \left(\int_0^R W_x R dR \right) dt.$$

Мұнда (7.1)-ден dt мәнін қоя отырып, аламыз:

$$\overline{t_{жс}} = t_c - 2 \int_0^1 \left(\int_0^R W_x R dR \right) \cdot \left(\frac{2q_c \cdot r_0}{(\lambda + \lambda_T) R} \int_0^R W_x R dR \right) dR =$$

$$= t_c - \frac{4q_c \cdot r_0}{\lambda} \int_0^1 \frac{\left(\int_0^R W_x R dR \right)^2}{\left(1 + \frac{\lambda_T}{\lambda} \right) R} dR,$$

бұл жерде болады:

$$\frac{(t_c - \overline{t_{ж}}) \lambda}{2q_c \cdot r_0} = 2 \int_0^1 \frac{\left(\int_0^R W_x R dR \right)^2}{\left(1 + \frac{\lambda_T}{\lambda} \right) R} dR.$$

Анықтамаға сәйкес

$$\frac{(t_c - \overline{t_{ж}}) \lambda}{2q_c \cdot r_0} = \frac{\lambda}{\alpha \cdot d} = \frac{1}{Nu_d},$$

сонда

$$\frac{1}{Nu_d} = 2 \int_0^1 \frac{\left(\int_0^R W_x R dR \right)^2}{\left(1 + \frac{\lambda_T}{\lambda} \right) R} dR.$$

Бұл теңдеу Лайонмен алынған, универсалды болып табылады, себебі ламинарлы да, турбулентті де ағындар үшін жарамды болады. Егер жылдамдықты үлестіру белгілі болса, онда жылу беру коэффициентін де есептеуге болады.

Ламинарлы ағын үшін Лайон интегралы жеңілдетіледі:

$$\frac{1}{Nu_d} = 2 \int_0^1 \frac{dR}{R} \left(\int_0^R W_x R dR \right)^2.$$

Гидродинамикалық тұрақтандырылған ағын кезінде жылдамдық профилі $w = w_{\max} [1 - (r/r_0)^2]$ немесе өлшемсіз түрде $W_x = 2[1 - R^2]$. Оны алдыңғы теңдеулерге қоямыз, сонда

$$\frac{1}{Nu_d} = 2 \int_0^1 \frac{dR}{R} \left(\int_0^R W 2(1 - R^2) R dR \right)^2 = \frac{11}{48}.$$

Мұнан $Nu_d = \frac{48}{11} \approx 4,36$ болатыны шығады. Осылайша, тұрақтандырылған жылу беру кезінде Нуссельт критерийі тұрақты және 4,36-ға тең болады. Бұл шарт қабырғадағы тұрақты жылу ағыны кезінде алынған. Қабырғаның тұрақты температурасы кезінде теория $Nu_d = 3,66$ береді. Нуссельт санының мәндері жылдамдықты параболалық үлестіру үшін алынған. Мұндай үлестіру жойылатын шағын температуралық арындарда немесе өзгермейтін сұйық параметрлері кезінде орын алатын болады. Сол себепті алынған нәтижесіне тәжірибелік деректерден алшақтауы өте жоғары болуы мүмкін. Қазіргі уақытта тәжірибелік есептеулер эмпирикалық формулалар бойынша жүргізіледі.

